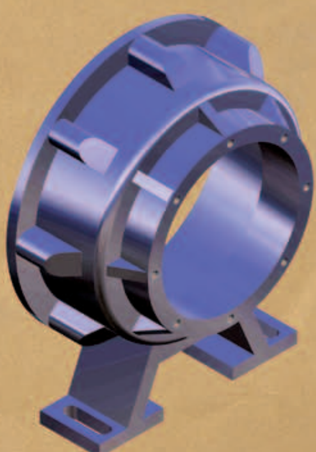
MARRAZKETA TEKNIKOA



Batxilergoa 2

Rafael Ciriza
Roberto Galarraga
Mª Angeles García
José Antonio Oriozabala

erein

Eusko Jaurlaritzako Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailak onetsia (2004-12-17)

Azalaren diseinua:
Iturri

Diseinua eta maketazioa:
IPAR

Marrazkiak:
Rafael Ciriza, Roberto Galarraga, Mª Angeles García, José Antonio Oriozabala

Euskararen arduraduna:
Rosetta

ISBN: 84-9746-121-5

L.G.:

Inprimategia:
Grafman S.A. Gallarta (Bizkaia)

Marrazketa teknikoa

Batxilergoa 2

Rafael Ciriza
Roberto Galarraga
Mª Angeles García
José Antonio Oriozabala

EREIN

AURKIBIDEA

1. Geometria deskribatzailearen hasi-masiak

Oinarrizko elementuak

Irudi geometriko guztiak oinarrizko elementu batzuez daude osatuta, eta elementu horiek ezaugarri geometrikoak esaten zaien lotura batzuen bidez elkarrekin loturik daude. Ezaugarri horien artean ezaugarri metrikoak eta ezaugarri grafikoak nabarmendu behar dira, batez ere.

Ezaugarri metrikoak Geometria Metrikoaren gaia dira; neurri-kontzeptuari dagozkio; ezaugarri grafikoetan, berriz, ez da sartzen neurri-kontzepturik; puntuek, zuzenek eta planoek elkarri buruz duten kokaerari dagozkio, eta Geometria Proiektiboaren gaia dira.

Irudi espazialak osatzen dituzten elementuak bata bestetik atera daitezke, baina horietako batzuk oinarrizkotzat definitu behar izaten dira beti. Geometriaren oinarrizko elementuak puntua, zuzena eta planoa dira. Oinarrizko elementuok adiera zabalagoa dute Geometria proiektatzailean Geometria metrikoan baino, orain puntu, zuzen eta plano propioei izen partikularrak ematen baitzaizkie, elementu inpropio edo infinituko deituak ere badirela onartzen denez geroztik.

Puntu inpropio edo infinituko puntu deituko diogu zuzen baten noranzkoari eta, halaxe, zuzen paralelo guztiek puntu komun bat dutela esango dugu: beren puntu inpropioa.

Plano baten puntu inpropioen multzoari zuzen inpropio edo infinitukoa deitzen zaio, eta plano horren paralelo diren plano guztien elementu komuna da.

Espazioko zuzen inpropio guztien multzoari plano inpropio edo infinituko plano deitzen zaio, eta hark ere, horrenbestez, espazioko puntu inpropio guztiak biltzen ditu bere baitan.

Oinarrizko forma geometrikoak. Sailkapena

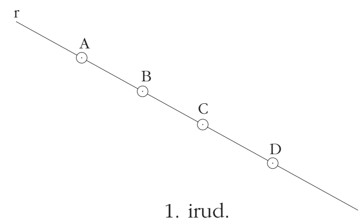
Oinarrizko forma geometrikoak oinarrizko infinitu elementu geometriko (puntu, zuzen, plano) dituzten multzo jarraituak dira, non elementu geometriko horiek beren artean barnekotasun-baldintza jakin batzuk betetzen dituzten.

Oinarrizko elementu geometrikoak kontuan hartuta, hiru taldetan sailkatzen dira forma geometrikoak:

Lehenengo kategoriako oinarrizko formak

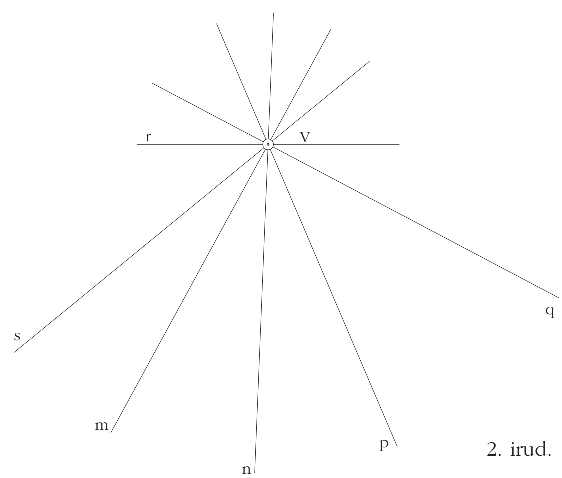
Mota bakarreko elementuz (puntuz, edo zuzenez, edo planoz) osatuta daudenak dira. Lehenengo kategoriako oinarrizko formak hiru dira:

Serie lerrozuzena, zuzen bateko infinitu puntuk osatua. Zuzen horri seriearen oinarria deitzen zaio. (1. irud.)



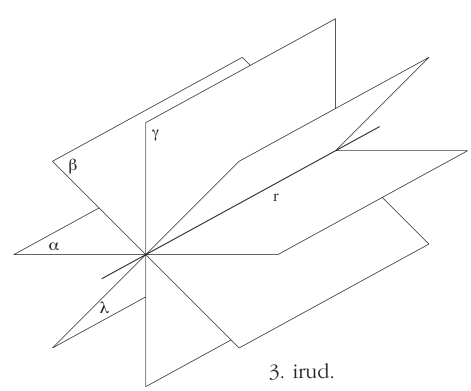
1. irud.

Zuzen-sorta, izpi-sorta eta erradiazio-plano ere deitua, plano bateko V puntutik igarotzen diren plano horretako infinitu zuzenek osatua. Zuzen horiek dauden planoari sortaren oinarria deitzen zaio, eta V puntu komunari sortaren zentro edo erpin. (2. irud.)



2. irud.

Plano-sorta, sortaren ertz deitzen zaion zuzen batetik igarotzen diren infinitu planok osatua. (3. irud.)



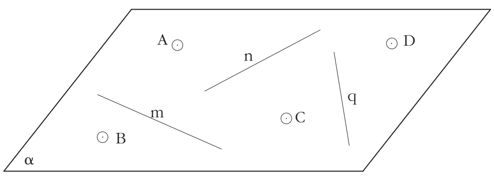
3. irud.

Bigarren kategoriako oinarrizko formak

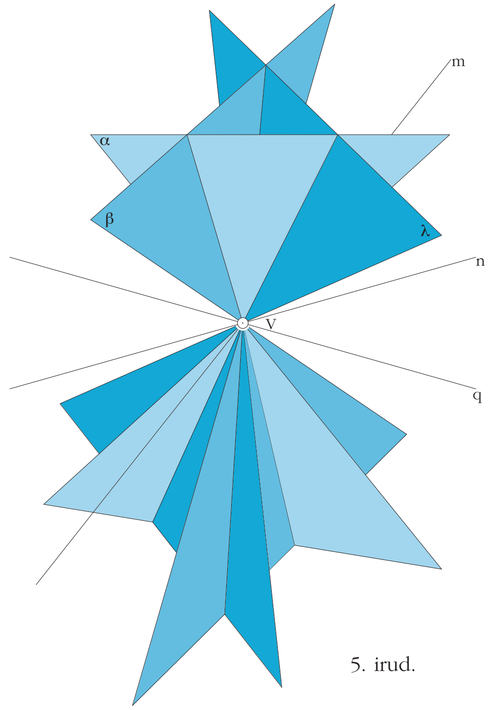
Bi motatako elementuz (puntuz eta zuzenez, edo zuzenez eta planoz) osatuta daudenak dira. Talde honetako oinarrizko formak hauek dira:

Forma planoa. Plano bat osatzen duten puntu eta zuzen guztien multzoa. (4. irud.)

Erradiazioa. Erradiazio zentro edo erpin deitzen den V puntu batetik igarotzen diren infinitu zuzen eta planoek osatua. (5. irud.)



4. irud.



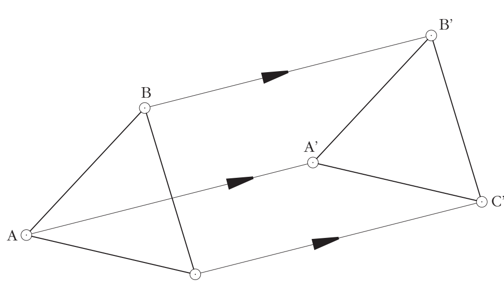
5. irud.

Hirugarren kategoriako oinarrizko formak

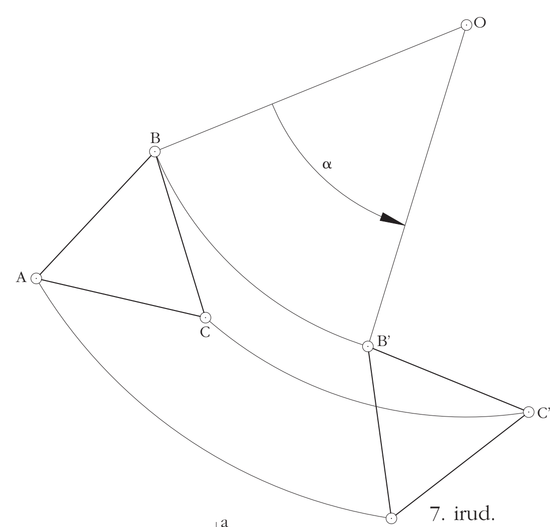
Espazioko infinitu puntu, zuzen eta planoen multzoa.

Transformazio geometrikoak

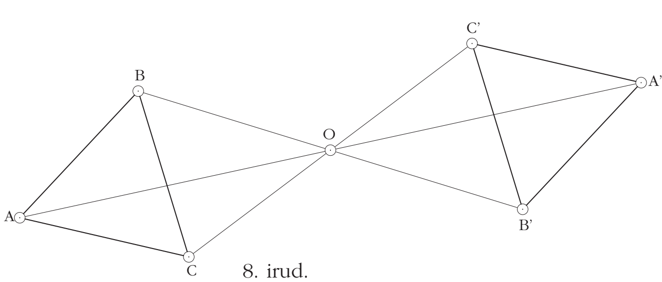
Transformazio-kontzeptua eragiketa, erlazio, egokitasun eta abarren baliokidea da. Transformazio guztietan *f* forma bateko A puntu bakoitzari A’ puntu bat dagokio, eta bat bakarrik, *f’* forman, eta alderantziz. Hala, transformazioak dira, esate baterako, 6. irudiko translazioa, 7. irudiko biraketa, 8. eta 9. irudietako simetria zentrala eta ardatz-simetria.



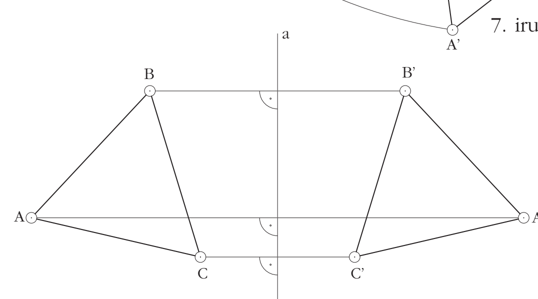
6. irud.



7. irud.



8. irud.



9. irud.

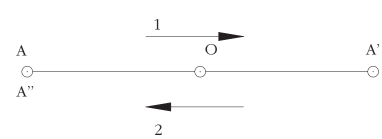
Definizioak:

- *f*-ko A elementu bakoitzari *f*´-eko A´ elementu bana dagokion *f*-tik *f*´-erako transformazioari transformazio uniboko deitzen zaio. Horrez gainera, *f*´-eko A´ elementu bakoitza *f*-ko A baten transformatua baldin bada, transformazio biunibokoa deitzen zaio. *f*´-etik f-rako transformazioari alderantzizko edo elkarrekiko deitzen zaio, eta f-n zein *f*´-en elkarri egokitzen zaizkion puntuei, zuzenei eta gainerakoei homologo deitzen zaie. Translazioa, biraketa, simetria, transformazio biunibokoak dira guztiak.
- Forma bat beregain transformatzen baldin bada, eta elementu transformatuek ere jatorrizkoek elkarrekiko zuten kokapen berbera baldin badute, transformazio horri transformazio adostua deitzen zaio. Jatorrizkoak ez bezalako elkarrekiko kokapena badute, adostu gabea deitzen zaio. Translazioa, biraketa eta simetria zentrala transformazio adostuak dira. Ardatzaren araberako simetria, transformazio adostu gabea da.
- Bere transformatuarekin bat datorren elementuari elementu bikoitz deitzen zaio. Simetria zentralean, O puntua puntu bikoitza da, eta ardatzaren araberako simetrian, e ardatzeko puntuak bikoitzak dira.
- Puntu guztiak bikoitzak badira, transformazio hori identitate bat dela esaten da. 360º-ko biraketa identitate bat da.

Transformazioen biderkadura. Inboluziozko transformazioa

A eta A´ elementu homologoak dituen transformazioaren bitartez *f* forma bat beste *f*´ forma bat bihurtzen bada, eta A´ eta A´´ elementu homologoak dituen beste transformazio geometriko baten bitartez *f*´ forma *f*´´ bihurtzen bada, *f* forma *f*´´ bihurtzen duen transformazioari, A eta A´´ elementu homologotzat dituenari, aipatutako bi transformazioaren biderkadura esaten zaio.

Bi transformazio berdin jarraian eginez lehenengo formaren erabat berdina den beste forma bat ateratzen bada, biderkadura-transformazio horri inboluziozko transformazio deitzen zaio. 10. irudiko simetria zentralean, O zentroaren gain bi simetria aplikatuz, lehenengo simetrian A puntua A´ puntua bihurtzen da, eta bigarren simetrian A´ puntua A´´ puntua bihur-tzen da, A puntuarekin bat datorrena, eta inboluziozko transformazioa da, horrenbestez, bi simetrien biderkadura.



10. irud.

Kongruentzia. Berdintasuna eta isomeria

Bi irudi zurrun mugimendu batez elkarren gainera ekarriz bat badatoz kongruenteak direla esaten da.

Bi irudi kongruente berdinak dira beti, baina baliteke bi irudi berdin ez izatea kongruenteak, baldin eta planoan edo espazioan ez bada biak elkarrekin adostaraziko dituen mugimendurik. Ardatzaren araberako simetria da bi irudi berdinak izan baina planoan kongruenteak ez diren kasu bat. Antzeko gauza gertatzen da espazioan bi eskuekin. Elkarren ispilu-irudiak dira baina ez dira kongruenteak. Eskuaren ahurra eta eskugaina kontuan hartuz gero, ez dago biak berdinduko dituen mugimendurik.

Transformazio batean puntu homologoen arteko distantzia mantentzen baldin bada, AB=A´B´ zuzenkien arteko berdintasuna gertatzen bada alegia, transformazio horri isomeria deitzen zaio. Horrez gainera noranzkoa ere gordetzen baldin bada isomeria adostua deitzen zaio, eta bestela, isomeria adostu gabea.

Intzidentzia- edo determinazio-erlazioak

Intzidentzia hitza barnekotasunaren edo determinazioaren sinonimoa da alor honetan. Izen desberdineko bi elementuk batak bestearekiko barnekotasuna dutela esango da lehenengoa bigarrenaren baitan dagoenean edo bigarrena lehenengotik igarotzen denean. Zuzen bat plano batekoa dela esateak, adibidez, zuzen hori planoan dagoela edo planoak zuzen hori bere baitan duela edo planoa zuzenetik igarotzen dela esan nahi du. Intzidentzia-erlazioak hauek dira:

- Bi puntu desberdinek bi puntu horiek berak bere baitan hartzen dituen zuzen bat zehazten dute.
- Plano bereko bi zuzen desberdinek bietan dagoen puntu bat zehazten dute.
- Bi plano desberdinek bien baitan duten zuzen bat zehazten dute.
- Zuzen berekoak ez diren hiru puntuk hirurak bere baitan dituen plano bat zehazten dute.
- Sorta berekoak ez diren hiru planok, hiruren baitan dagoen puntu bat zehazten dute.
- Elkarrekiko barnekotasunik ez duten puntu batek eta zuzen batek biek barnean dituen plano bat zehazten dute.
- Elkarrekiko barnekotasunik ez duten plano batek eta zuzen batek biek barnean duten puntu bat zehazten dute.

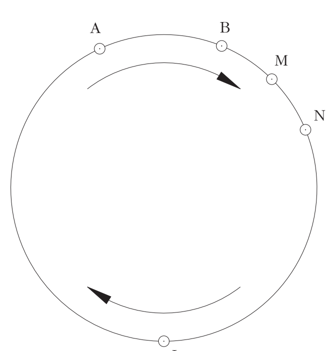
Ordenazio- eta bereizkuntza-erlazioak

Puntu inpropioaren definizioaz AB zuzen batek I∞ puntu inpropio bat bakarra badu, definizio horrexen arabera, har daiteke zuzen hori infinituko puntuan ixten den erradio infinituko kurbatzat, eta hala, zuzen hartan A puntu bat emanik, ibil daiteke zuzen guztia puntu inpropiotik igaroz eta berriro A-ra itzuliz. Horri deitzen zaio puntuek zuzen proiektiboan duten antolamendu natural edo zirkularra.

11. irudian egiazta daiteke A puntu bat jatorritzat hartu eta noranzko bat finkaturik, erabakita geratzen dela zuzen horretako M eta N edozein puntu pareren ordenamendua. Geziaren zentzuan M N-ren aurretik dator edo N M-ren ondoren dator.

Zuzena A eta B puntuetatik ebakitzen bada (12. irud.), bi zuzenki agertzen dira: A eta B muturrak dituen zuzenki finitua, eta B eta A muturrak zituen zuzenki infinitua. Lehenengoak puntu propioak ditu eta bigarrenak puntu propioak eta zuzenaren puntu inpropioa ditu. Bi zuzenkiak bereizteko zuzenki bakoitzean hirugarren puntu bat markatu beharko da: hala, 13. irudian, ACB (edo BCA) zuzenkia zuzenki finitua da eta ADB (edo BDA) zuzenkia zuzenki infinitua. Horietako bakoitzari bestearen osagarri deitzen zaio.

Azkenik, C eta D elementuak zuzenki osagarri banatan baldin badaude (13. irud.), AB eta CD pareak bananduta daudela esaten da, eta C eta D zuzenki berean badaude, bi pare horiek ez daudela bananduta esaten da.



11. irud.

12. irud.

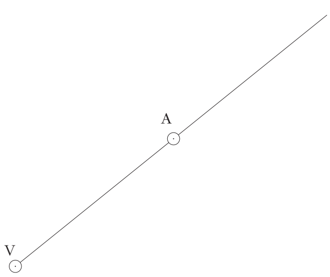
13. irud.

Proiekzio-eragiketak

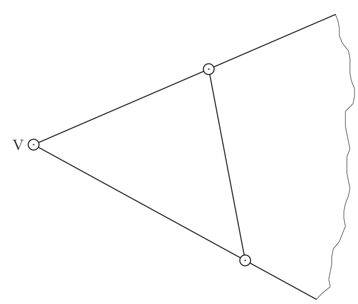
Geometria proiektatzailearen oinarrizko eragiketak hauek dira: puntu batetik edo zuzen batetik proiektatzea, eta zuzen batez edo plano batez ebakitzea.

V puntu batetik proiektatzea

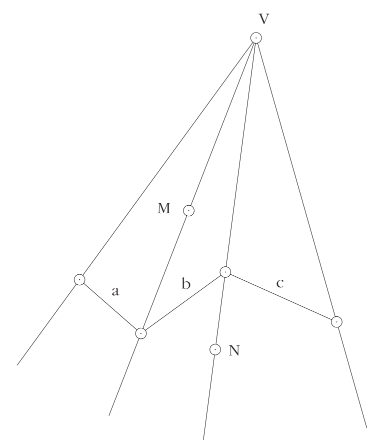
- V-tik A puntu bat proiektatzea VA zuzena marratzea da; zuzen horri zuzen proiektatzaile esaten zaio. (14. irud.)
- V-tik s zuzena proiektatzea, V-k eta s-k zehazten duten α planoa marraztea da; plano horri plano proiektatzaile esaten zaio. (15. irud.)
- V-tik puntuz eta zuzenez osatutako irudi bat proiektatzea, V-k irudiaren puntu eta zuzenekin zehazten dituen zuzen eta planoak marratzea da. Horrek eratzen duen erradiaketari irudiaren proiekzio edo perspektiba deitzen zaio. (16. irud.)



14. irud.



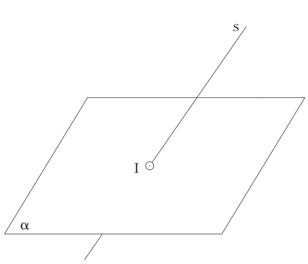
15. irud.



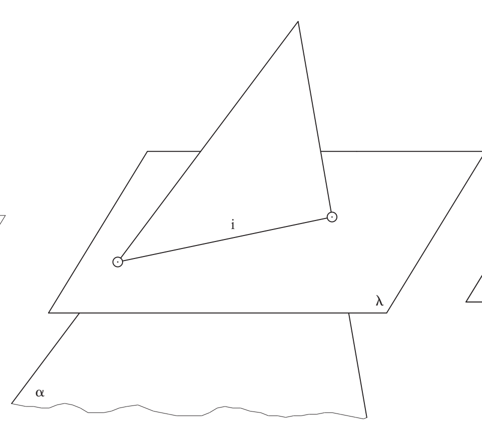
16. irud.

λ plano batez ebakitzea

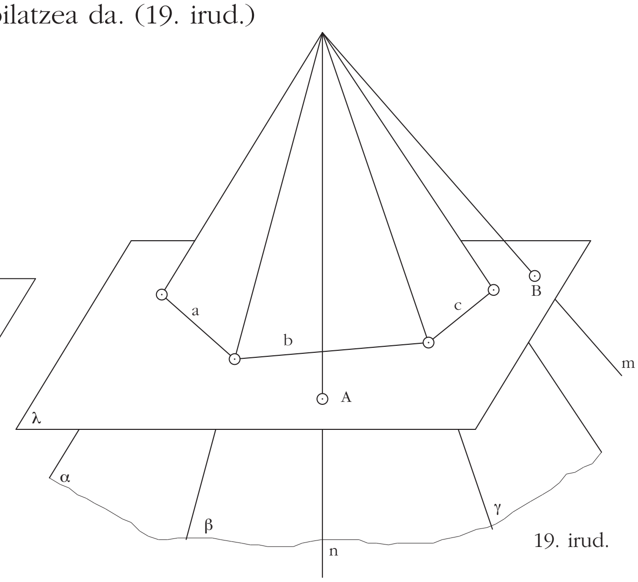
- s zuzen bat plano batez ebakitzea, s-ren eta λ-ren arteko I ebakidura, elkargune edo traza ere deitu ohi dena, bilatzea da. (17. irud.)
- α plano bat beste λ plano batez ebakitzea, α-ren eta λ-ren arteko i traza edo elkargunea bilatzea da. (18. irud.)
- Planoz eta zuzenez osatutako irudi bat λ plano batez ebakitzea, zuzen eta plano horiek λ planoan elkargunea esaten zaiona osatuz eratzen dituzten trazak bilatzea da. (19. irud.)



17. irud.



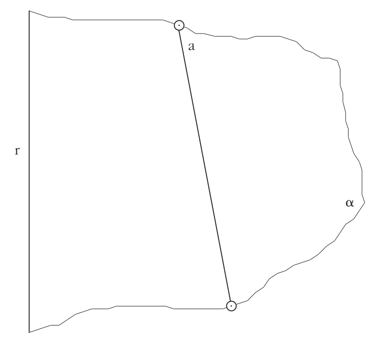
18. irud.



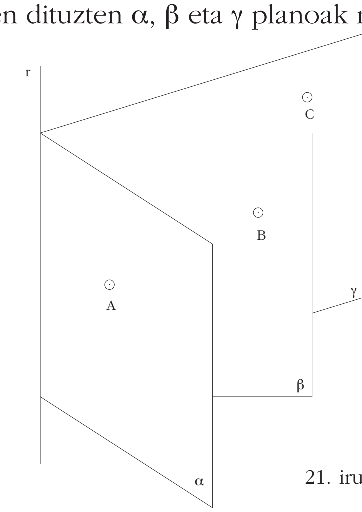
19. irud.

r zuzen batetik proiektatzea.

- A puntu bat *r*-tik proiektatzea, *r*-k eta A-k definitzen duten α planoa marratzea da. 15. irudiko kasu bera da.
- *r* zuzenetik plano berekoa den *a* zuzen bat proiektatzea, bien artean zehazten duten α planoa marratzea da. (20. irud.)
- A, B eta C puntuek osatzen duten irudi bat *r*-tik proiektatzea, *r*-k eta irudiaren puntu bakoitzak zehazten dituzten α, β eta γ planoak marratzea da. (21. irud.)



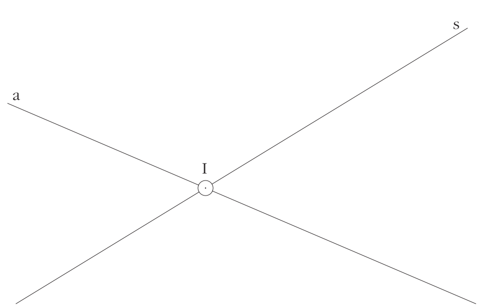
20. irud.



21. irud.

s zuzen batez ebakitzea

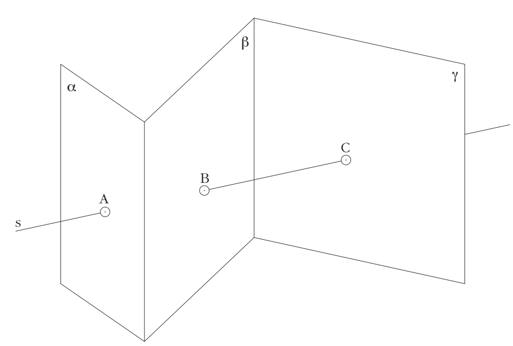
- α plano bat *s* zuzen batez ebakitzea, bien arteko I traza edo elkargunea bilatzea da. (17. irud.)
- a zuzen bat plano bereko beste *s* zuzen batez ebakitzea, bien arteko I elkargunea bilatzea da. (22. irud.)



22. irud.

- Planoz osatutako irudi bat *s* plano batez ebakitzea, *s* zuzenak plano horietako bakoitzarekin eratzen dituen elkargunea edo trazak bilatzea da. (23. irud.)

Bukatzeko, esan daiteke, irudi bat plano batera proiektatzea proiekzioa plano horretaz ebakitzea bezalaxe dela.

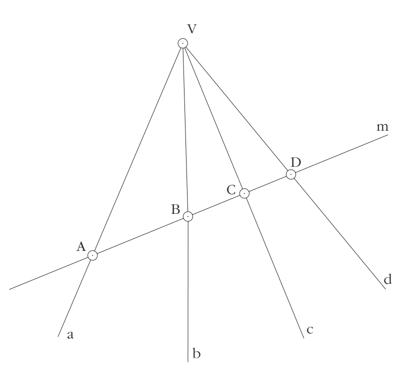


23. irud.

Perspektibotasuna

Bi irudi, bata bestearen ebakidura denean, edo biak lehenengo kategoriako forma baten proiekzioak edo ebakidurak direnean eta biek elementu komun bat dutenean elkarren perspektiboak direla edo elkarrekin perspektibazko erlazioa dutela esaten da.

Forma baten eta haren elkargunearen edo proiekzioaren arteko perspektibotasuna

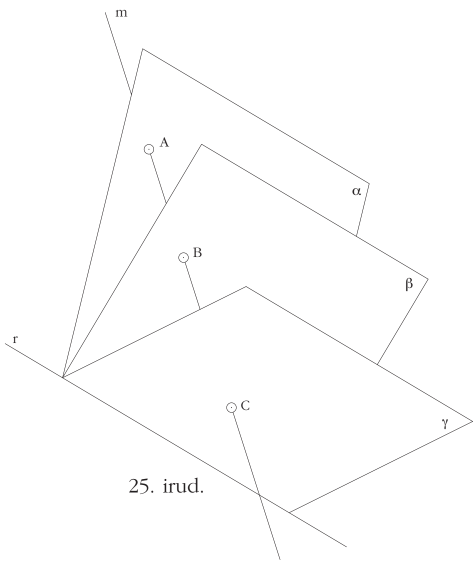


24. irud.

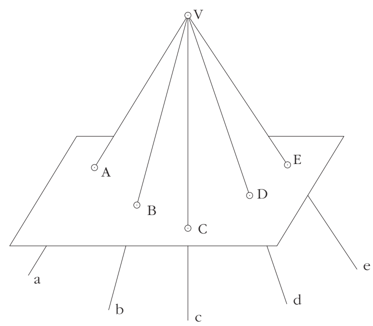
- *a, b, c…* zuzen-sorta bat V-tik igarotzen ez den beste m zuzen batez ebakitzen bada, *m* oinarriko A, B, C… serie lerrozuzena perspektiboa da zuzen-sortari buruz. (24. irud.)
- *r* ertza duten plano-sorta bat r-ren plano berekoa ez den beste *m* zuzen

batez ebakitzen bada, elkargune gisa eratzen den A, B, C… serie lerrozuzena perspektiboa da plano-sortari buruz. (25. irud.)

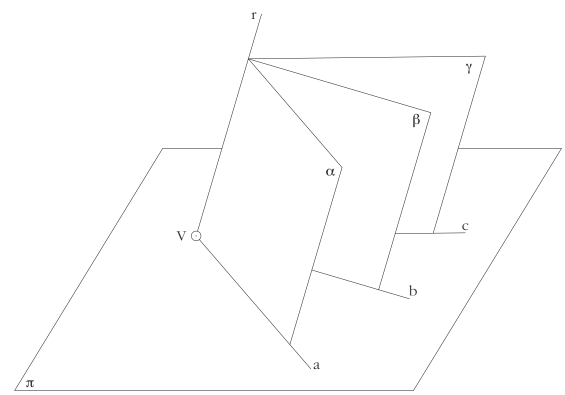
- *a, b, c…* zuzen-sorta bat V-tik igarotzen ez den beste π plano batez ebakitzen bada, zuzen-sortaren ebakidurazko A, B, C… puntu-seriea perspektiboa da hari buruz. (26. irud.)
- α, β, γ... plano-erradiazio bat λ plano batez ebakitzen baldin bada, planoaren erradiazioaren ebakidurazko *a, b, c…* zuzen-multzoa perspektiboa da hari buruz. (19. irud.)
- *r* ertza duen α, β, γ... plano-sorta π plano batez ebakitzen bada, V-tik igarotzen den ebakidurazko zuzen-sorta perspektiboa da plano-sortari buruz. (27. irud.)



25. irud.



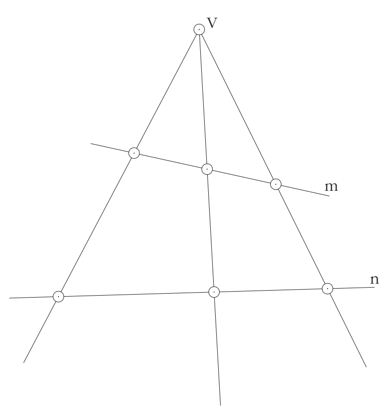
26. irud.



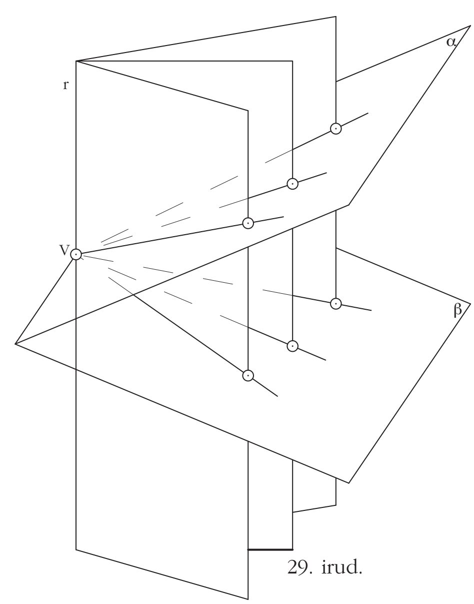
27. irud.

Forma beraren ebakiduren arteko perspektibotasuna

- *m* eta *n* oinarriko bi serie lerrozuzen (28. irud.) elkarren perspektiboak dira, V-tik igarotzen den zuzen-sortaren elkarguneak direlako, eta V da serie horien perspektiba-zentroa.
- *r* ertza duen plano-sorta bat ertzeko puntu beretik igarotzen diren α eta β bi planoz ebakitzen baldin bada, bi plano horietan eratzen diren elkarguneak elkarren perspektibo diren bi zuzen-sorta dira. Plano-sortaren *r* er-tzari zuzen-sorten perspektiba-ardatza deitzen zaio. (29. irud.)



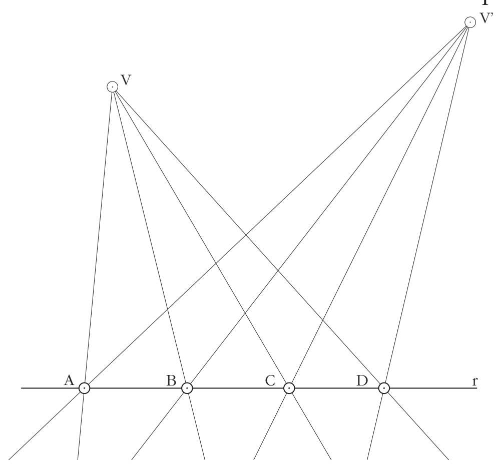
28. irud.



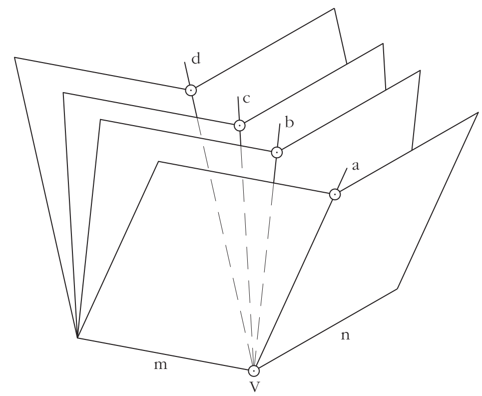
29. irud.

Forma beraren proiekzioen arteko perspektibotasuna

- V eta V´ erpin bana eta *r* oinarriko A,B,C,D serie lerrozuzena erkide duten bi zuzen-sortak (30. irud.) elkarren perspektibo dira, *r* oinarriko serie lerrozuzena perspektiboa delako bi zuzen-sortei buruz. Seriearen oinarriari sorten perspektiba-ardatz deitzen zaio.
- *a, b, c, d* zuzen-sortarekin eta sortaren V erpinetik igarotzen diren *m* eta *n* bi zuzen desberdinekin eratzen diren bi plano-sortak (31. irud.) elkarren perspektibo dira, zuzen-sorta perspektiboa delako bi plano-sortei buruz. Zuzen-sortaren planoari perspektiba-plano zentrala deitzen zaio.



30. irud.

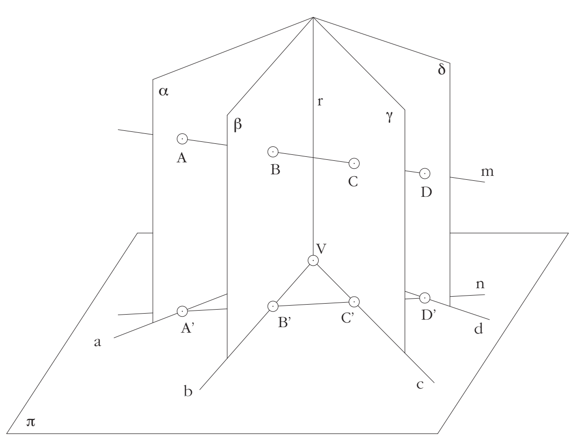


31. irud.

Lehenengo kategoriako formen arteko proiektibotasuna

Proiektibotasunaren definizioetatik, Chasles, Staudt edo Poncelet-enetatik, denek balio duten arren, Ponceletena hartuko dugu, hura delako interpretatzen errazena: “Lehenengo kategoriako bi forma proiektiboak dira baldin eta proiekzio- eta ebakidura-kate finitu baten bitartez bata bestetik atera badaiteke”.

32. irudiko adibidean, *m* oinarriko A, B, C eta D serie lerrozuzena eta *r* zuzena emanik, *r*-tik proiektatuz, *r* ertza duen α, β, γ eta δ plano-sorta ateratzen da. Plano-sorta hori beste π plano batez ebakiz gero, V erpina duen *a, b, c* eta *d* zuzen-sorta ateratzen da. Zuzen-sorta hori *n* zuzen batez ebakiz, A´, B´, C´ eta D´ serie lerrozuzena ateratzen da. Sorta eta serie hauek, eta horietatik proiekzioz eta ebakiduraz ateratzen direnak, proiektiboak dira elkarri buruz.



32. irud.

Proiektibotasunaren sailkapena

Elkarri buruz egokitzen diren elementuak zein motatakoak diren, hala sailka daiteke proiektibotasuna:

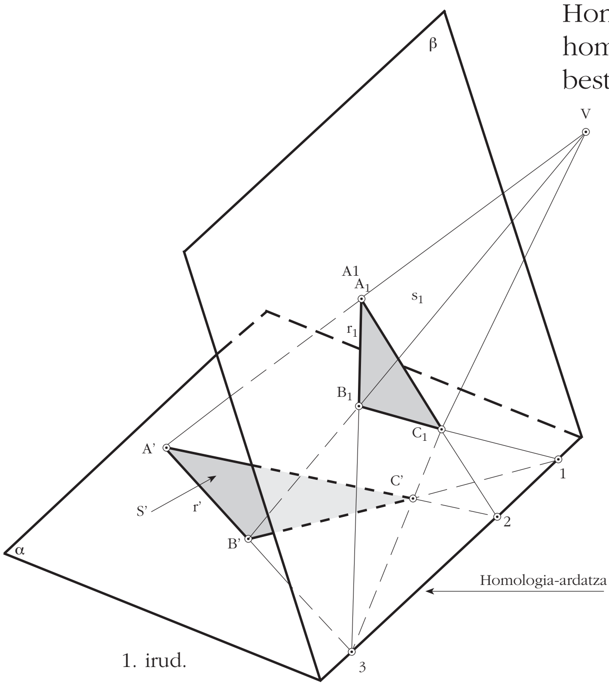
- Homografia: Elementu homologoak mota berekoak badira: puntua eta puntua; zuzena eta zuzena edo planoa eta planoa.
- Korrelazioa: Mota desberdinetakoak badira: Puntua eta zuzena, puntua eta planoa…

2. Homologia, afinitatea eta homotezia

Homologia

Paraleloak ez diren bi planok zuzen-sorta bat ebakitakoan sorturiko bi irudien arteko erlazioa da espazioko *homologia*.

1. irudian ikusten dugun bezala, α eta β planoek ebakitzen dituzte V puntutik abiatzen diren hiru zuzenak eta ebakidura-puntuak lortu dira. Honelako erlazioak bideratu dira honenbestez: A_1 puntuari A' puntu homologoa dagokio, r_1 zuzenari *r'* zuzen homologoa, eta S_1 irudiari beste S' irudi homologoa.



1. irud.

Honako elementu hauek hartzen dute parte *homologia* batean:

– *Homologia-zentroa:* V puntua, zuzen-sortaren abiapuntua.
– *Homologia-ardatza:* bi planoen arteko ebakidura-zuzena.

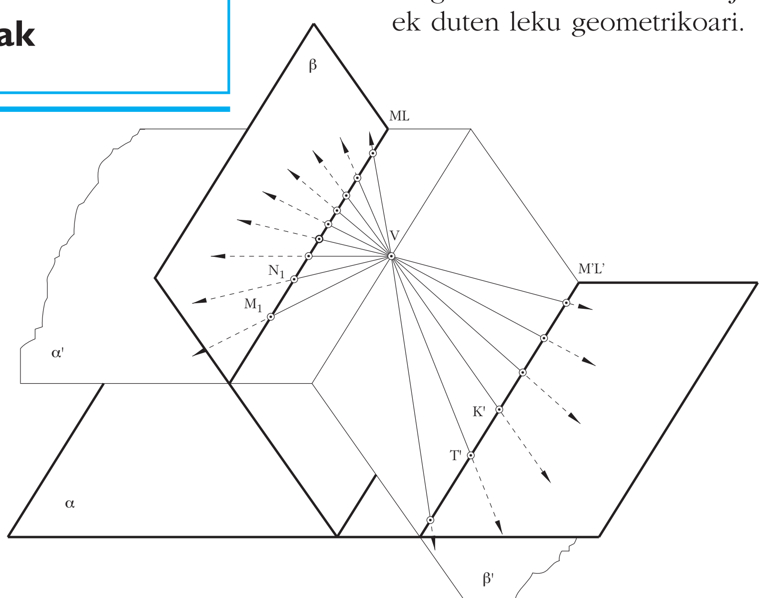
Esan dezagun, bestalde, A_1, B_1 eta C_1 puntuek honako baldintza hauek bete behar dituztela A', B' eta C' puntuen *homologoak* izateko:

– Lerro zuzenean egotea eta haien homologia-zentroa V puntua izatea.
– Zuzen homologoak, A_1B_1 eta A'B' adibidez, homologia-ardatzaren puntuetan elkar ebakitzea.

Azken baldintza horren arabera, *homologia-ardatza puntu bikoitzen* leku geometrikoa da, hau da, *elkarren artean homologoak* diren puntuen leku geometrikoa.

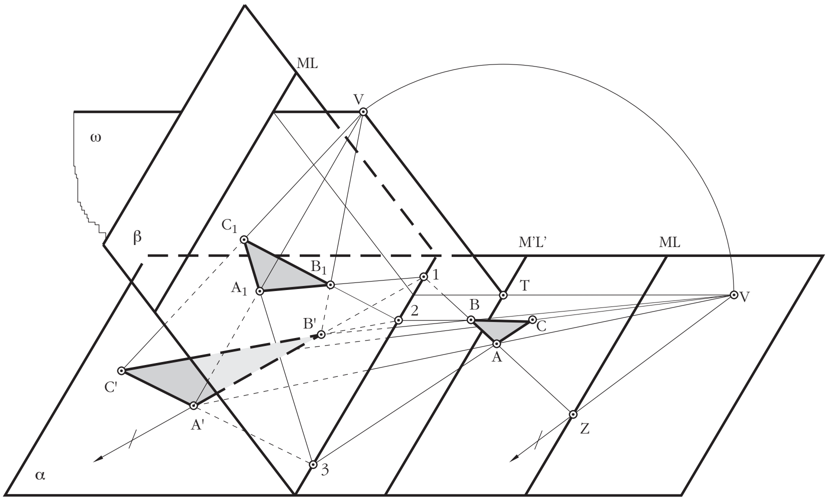
Muga-lerroak

Muga-lerroa deitzen zaio *infinituko puntuen* puntu homologoek duten leku geometrikoari.

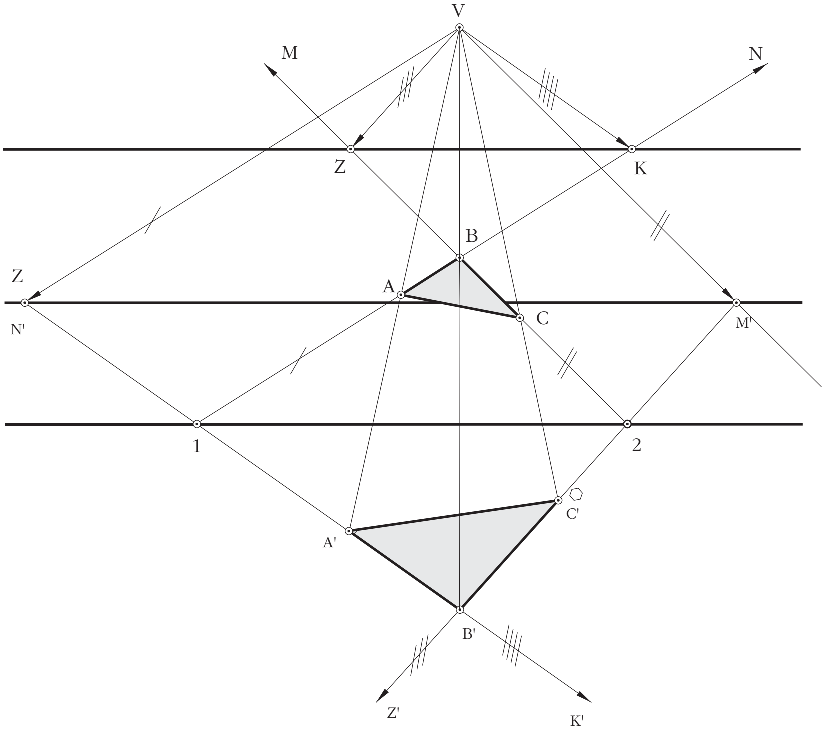


2. irud.

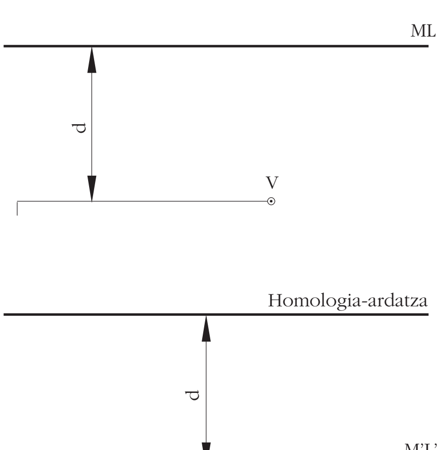
Jakina denez, bi zuzen edo plano bat eta zuzen bat paraleloak badira, infinituan ebakitzen dute elkar. Honela bada, 2. irudian α planoarekiko zuzen paraleloak trazatzen baditugu V puntutik, infinituan ebakiko dute zuzen horiek α planoa. Hala ere, β planoa ebakitzen dute zuzen horiek berek M_1, N_1... puntuetan, zuzen bat eratuz. Zuzen hori da ML muga-lerroa. M_1 puntuak bere M' puntu homologoa α planoko infini-



3. irud.



4. irud.



5. irud.

tuan izango du, muga-lerro hori osatzen duten gainerako puntu guztiek bezalaxe.

Era berean aurkituko dugu M'L' *muga-lerroa.* β planoarekiko zuzen paraleloak trazatuko ditugu V puntutik eta α planoarekiko ebakidura-puntuek eratuko dute M'L' muga-lerroa. Eta horrenbestez esango dugu α planoaren barneko K' puntuaren puntu homologoa β planoan, infinituan, dagoela, K'V zuzenaren norabidean.

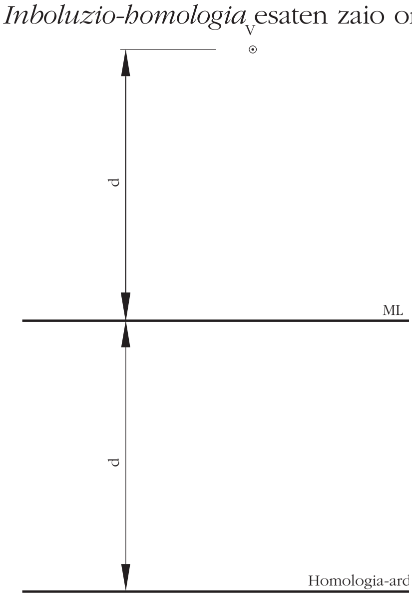
3. irudian ikus dezakegu nola igaro homologia espazialetik homologia planora.

Horretarako, β planoa α planoaren gainera eraitsi da, bere *homologia-ardatzaren* inguruan biratuta, eta A, B, C eta ML lortu ditugu. V puntua eraisteko, α eta β planoekiko ω plano elkarzuta trazatu da puntu horretatik eta T puntua lortu dugu. T puntua zentrotzat eta TV erradiotzat harturik, V puntua aurkituko dugu α planoan. Irudi berean ikus dezakegun bezala, paraleloak dira A'B' eta VZ zuzenen norabideak.

4. irudian agertzen da plano batean marrazturik 3. irudiko homologia. Ikusten dugun bezala, *homologia-ardatzaren* paraleloan daude *muga-lerroak.* Gainera, bi *muga-lerroetako* batetik, ML-tik edo M'L'-tik, V *homologia-zentrora* dagoen distantzia, eta beste muga-lerrotik, M'L'-tik edo ML-tik alegia, homologia-ardatzera dagoen distantzia berdinak dira.

Baliteke muga-lerroak V puntuaren eta *homologia-ardatzaren* arteko plano-ataletik kanpora egotea, 5. irudian ikusten den bezala.

Baliteke, halaber, bi limite-zuzenak nahastea, hau da, batera etortzea, 6. irudian adierazten den moduan. *Inboluzio-homologia* esaten zaio orduan.



6. irud.

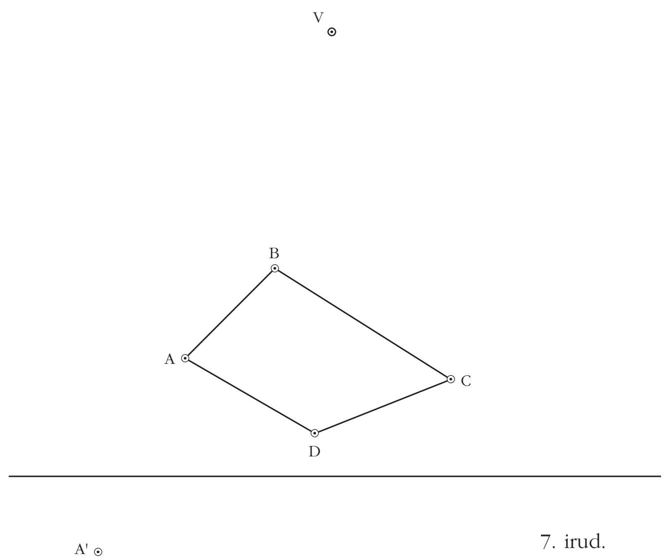
Homologia bat definitzeko moduak

Honako elementu hauek ezagutu behar dira *homologia* bat definitzeko:

1. *Zentroa*, ardatza eta bi *puntu homologo*.
2. *Zentroa*, *ardatza* eta homologoa aurkitu nahi zaion irudiaren planoan dagoen *muga-lerroa*. (3. irud.)

BURUTUTAKO ARIKETAK

1. 7. irudiko datuak ezagututa, marraz ezazu emandakoaren poligono homologoa.



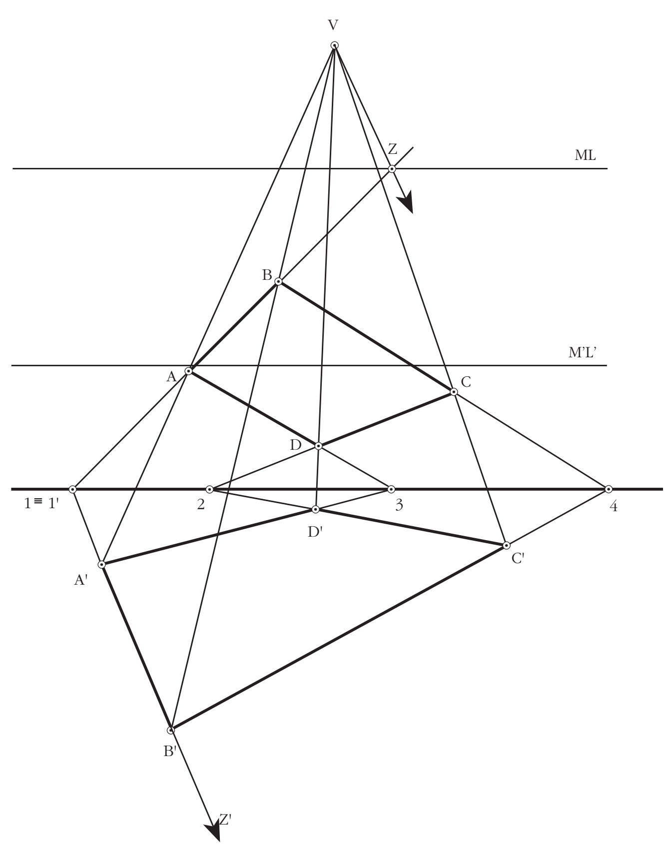
7. irud.

Ebazpena: B puntutik hasiko gara. Haren *homologoa* aurkitzeko, B eta A puntuak elkartu eta *homologia-ardatza* 1 puntuan ebaki arteraino luzatuko dugu zuzena. Bat eta bera dira 1 puntua eta 1’ puntu homologoa, ardatzaren barnekoak diren aldetik.

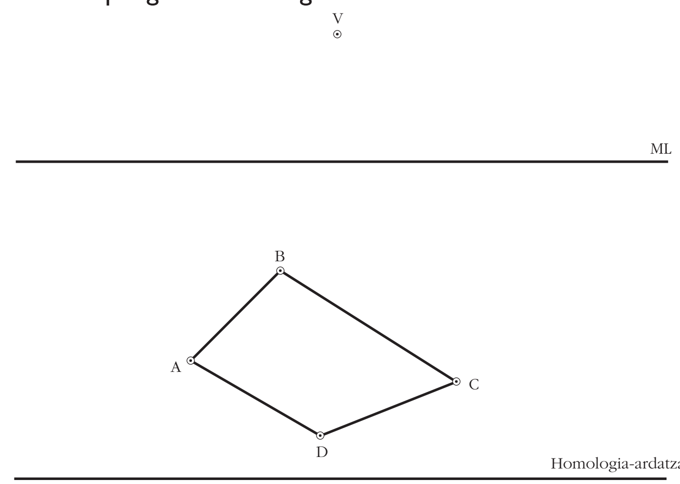
1’ A’-arekin eta V B-rekin elkartuko ditugu ondoren. Bi zuzen horiek B puntuaren B’ puntu homologoan elkar ebakiko dute. Honela jokatuta lortuko ditugu gainerako puntuak.

Infinituko puntu batetik, A’B’ zuzenean dagoen infinituko Z’ puntutik adibidez, abiatuko gara *muga-lerroak* lortzeko. Infinituko Z’ puntua A’B’ zuzenean badago, AB zuzenean egongo da haren puntu homologoa. A’B’ zuzenarekiko paraleloa V puntutik marrazten badugu, ML muga-lerroaren barneko Z puntuan ebakiko du paralelo horrek AB zuzena.

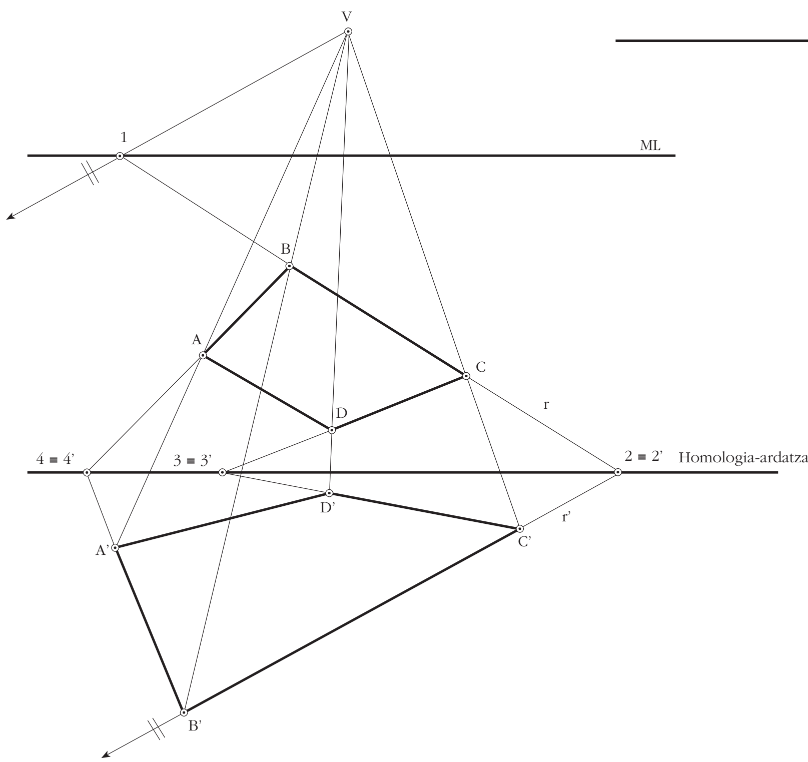
Z puntua lortu ondoren, jakinik *muga-lerroak* distantzia berdinera daudela *homologia-zentrotik eta homologia-ardatzetik* eta paraleloak direla *homologia-ardatzarekiko*, ML eta M’L’ zuzenak trazatuko ditugu.



2. 8. irudiko datuak ezagututa, marraz ezazu emandakoaren poligono homologoa.

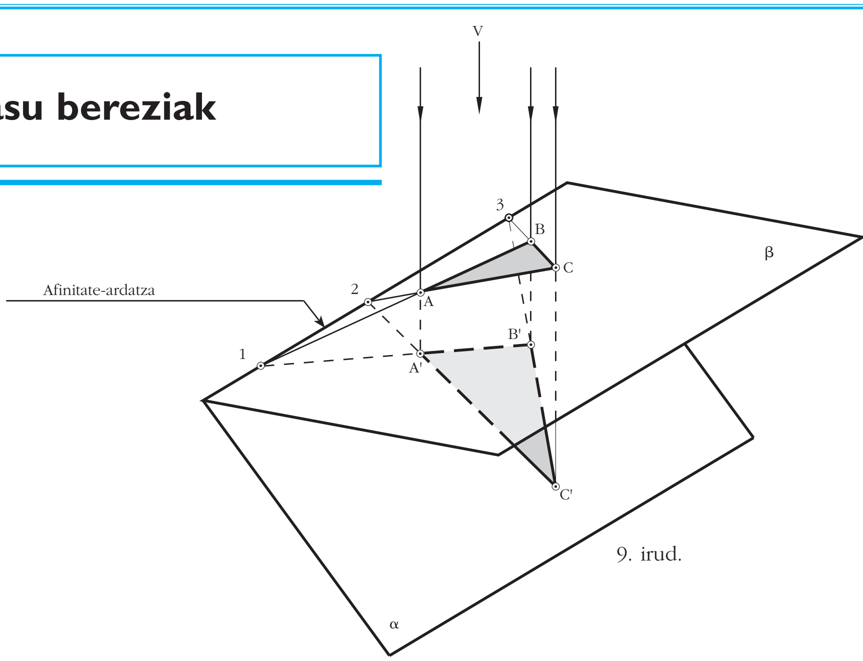


8. irud.



Ebazpena: B puntuaren homologoa aurkitzeko, B puntutik igaroko den edozein zuzen r trazatuko dugu; zuzen horrek 1 puntuan ebakiko du ML muga-lerroa eta 2 puntuan homologia-ardatza. *r* zuzenaren *r'* zuzen homologoak 2' puntutik igaro beharko du eta V1 zuzenaren paraleloa izango da. *r'* eta VB zuzenen arteko elkarguneak zehaztuko digu B puntuaren B' puntu homologoa. 7. irudian bezala jokatuko dugu gainerako puntuak lortzeko.

Kasu bereziak



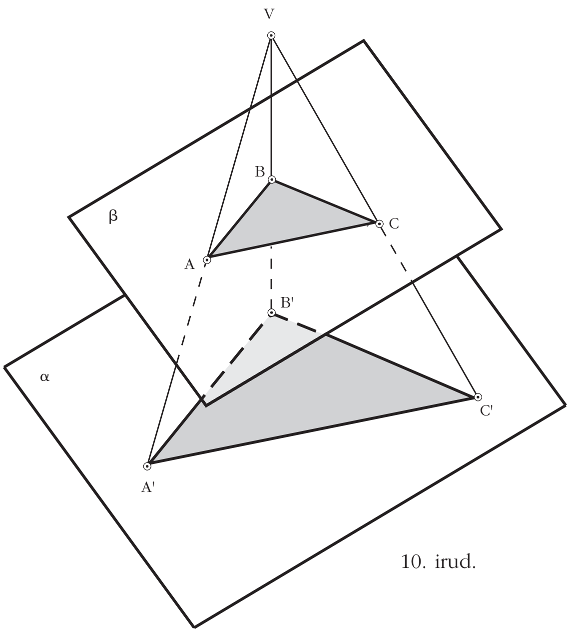
9. irud.

Homologia-kasu bereziak gertatuko dira *homologia-zentroa* eta *homologia-ardatza propioak* edo *inpropioak*, hau da, ezagunak edo infinituan egokituak diren ala ez kontuan hartu ondoan.

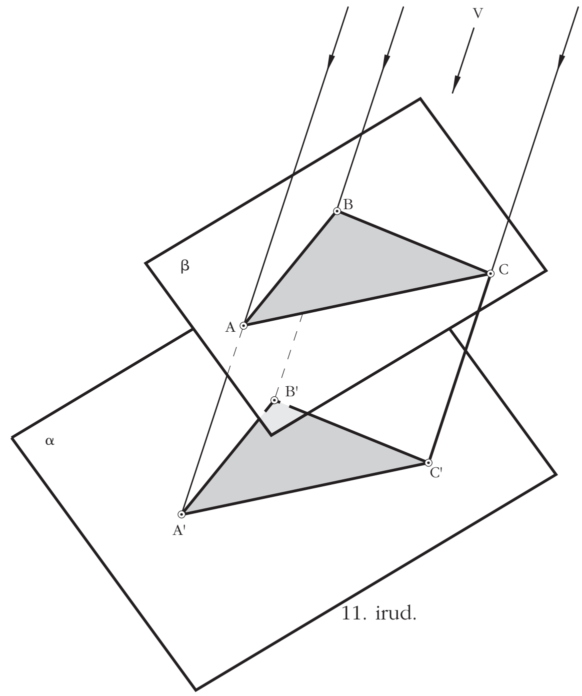
9. irudian ikus dezakegun bezala, infinituan dago *homologia-zentroa*. *Afinitate* bat gertatu da kasu horretan.

Zera ikusten dugu 10. irudian, *homologia-ardatza* infinituan dagoela, bi planoak paraleloan baitaude, hau da, *homotezia* bat gertatu da.

11. irudian, aldiz, infinituan daude *homologia-ardatza* eta *homologia-zentroa*, hau da, *translazioa* izenekoa gertatu da.



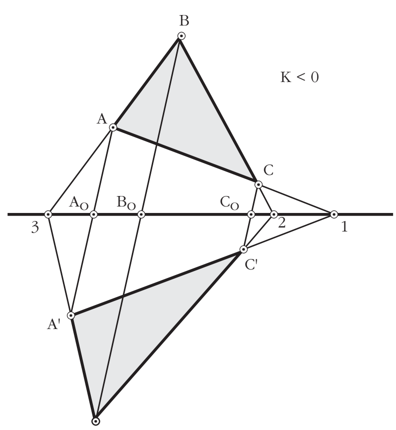
10. irud.



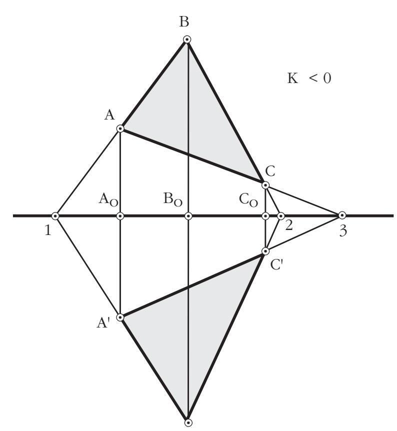
11. irud.

Afinitatea

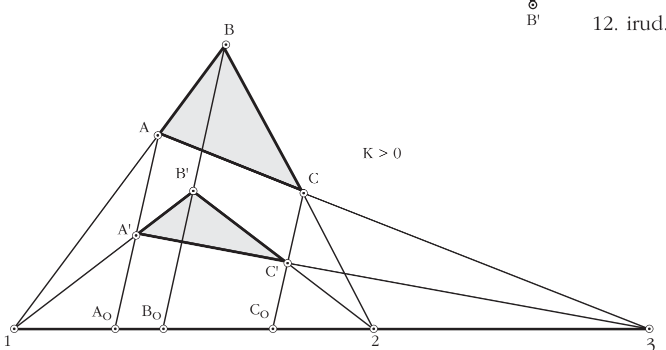
Dagoeneko argi geratu da *afinitatea homologia*-kasu berezi bat dela, eta *homologia-zentroa* inpropioa izatearen ondorioa hauxe dela: puntu homologoak batzen dituzten zuzenak paraleloak izatea. *Afinitate-norabidea* esaten zaie zuzen horien norabideari, eta afinitate-norabidea zeiharra (12. irud.) edo elkarzuta (13. irud.) izan daiteke *afinitate-ardatzarekiko*. *Muga-lerroak* inpropioak izango dira, hau da, infinituan egongo dira.



12. irud.



13. irud.



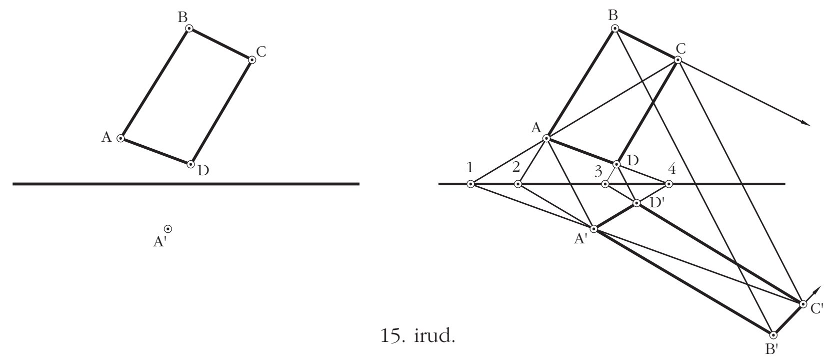
14. irud.

$K = A_0A / A_0A' = B_0B / B_0B' = C_0C / C_0C'$ erlazioan, *afinitate-arrazoia* du izena K konstanteak.

Irudi afinak *afinitate-ardatzaren* alde banatan badaude, negatiboa izango da *afinitate-arrazoia*, $K < 0$. (12. eta 13. irud.) Bi irudiak *afinitate-ardatzaren* alde berean badaude, positiboa izango da *afinitate-arrazoia*, $K > 0$. (14. irud.)

BURUTUTAKO ARIKETAK

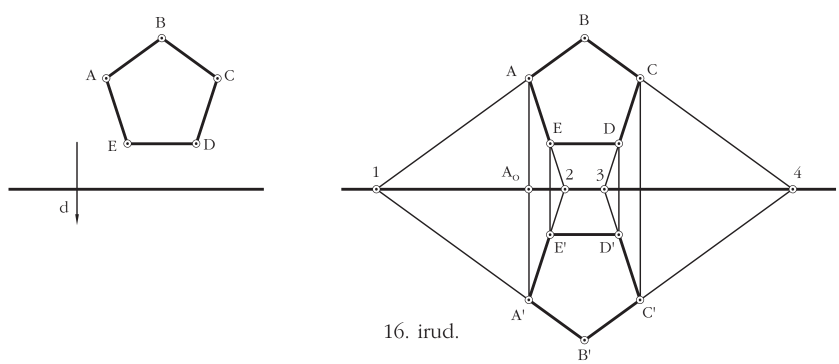
1. 15. irudiko datuak ezagututa, marraz ezazu emandakoaren poligono afina.



15. irud.

Ebazpena: 15. irudian ikusten dugu nola lortu behar diren emandako poligonoaren *puntu afinak*, homologia arrunt batean egin genuen bezalatsu, alegia.

2. 16. iruduko datuak ezagututa eta jakinik afinitate-arrazoia K = -1 dela, marraz ezazu emandakoaren poligono afina.



16. irud.

Ebazpena: Afinitate-arrazoia aplikatu eta honako hau lortuko dugu:

$$K = AA_0/A'A_0 \qquad -1 = AA_0/A'A_0 \qquad A'A_0 = -AA_0$$

Irudi afinak afinitate-ardatzaren albo banatan daudela adierazten digu (-) ikurrak. Ariketaren emaitzari erreparatzen badiogu irudi biak afinitate-ardatzarekiko simetrikoak direla egiaztatuko dugu. Beraz, ardatz-simetria afinitatearen kasu berezia dela esan genezake.

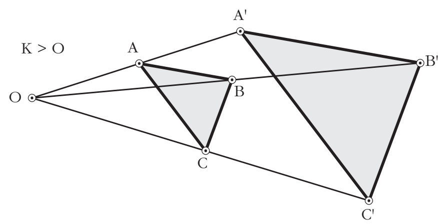
Homotezia

Homotezia ere homologia-kasu berezi bat da. Geometria-erlazio honetan *homologia-ardatza inpropioa* da eta, ondorioz, ez dago *muga-lerrorik*.

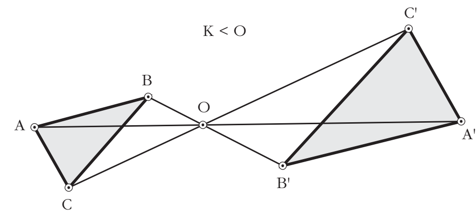
17. irudian A'B'C' triangelua da ABC triangeluaren homologoa, eta OA' / OA = OB' / OB = OC' / OC = K betetzen da, K *homotezia-arrazoia* izanik. Homotezia-arrazoia positiboa bada, K > 0, alde berean daude *homotezia-zentroa* eta puntu homologoak (17. irud.), eta negatiboa bada, K < 0, alde desberdinetan daude *homotezia-zentroa* eta puntu homologoak. (18. irud.)

Honako baldintza hauek betetzen dira *homotezia* guztietan:

1. Zentrotik igarotzen ez diren zuzen homologoak paraleloak dira.
2. Zuzenki homologoak paraleloak eta proportzionalak dira.
3. Angelu homologoak berdinak dira.



17. irud.



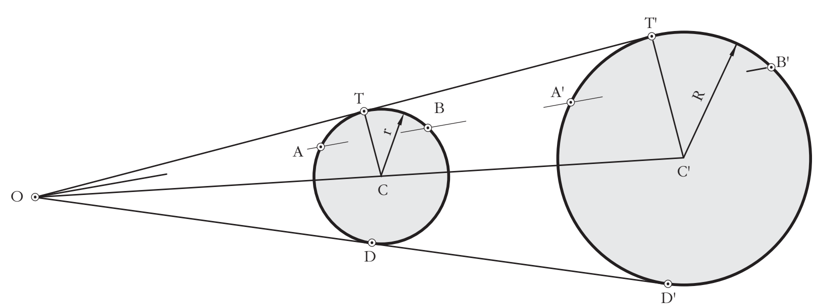
18. irud.

19. irudian bi zirkunferentzia homotetiko ditugu, eta honako hau betetzen da:

$$R/r = OC'/OC = K$$

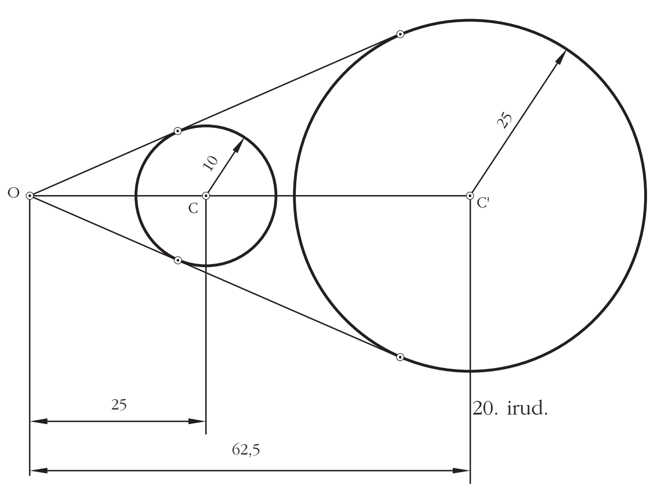
Beraz:

$$R = r \cdot K \qquad OC' = K \cdot OC$$



19. irud.

BURUTUTAKO ARIKETAK



20. irud.

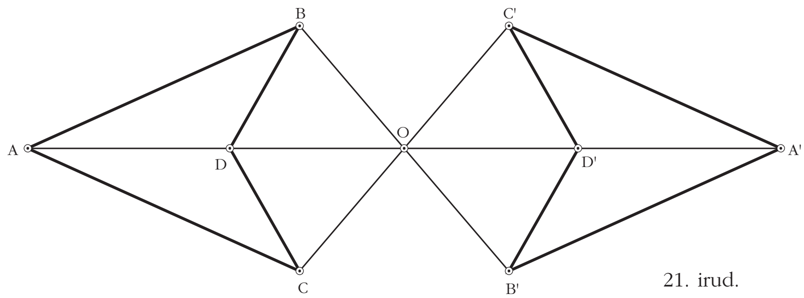
1. O homotezia-zentroa, K = 2,5 homotezia-arrazoia, eta C zentroa eta 10 mm erradioa dituen zirkunferentzia bat ezagututa, kalkula ezazu zirkunferentzia horren homotetikoa OC = 25 mm dela jakinik.

   20. irudian ikusten den bezala, OC zuzenean dagoen eta C' zentroa duen beste zirkunferentzia bat da homotetikoa:

$$OC' = K \cdot OC = 2{,}5 \cdot 25 = 62{,}5 \text{ mm}$$

$$R = K \cdot r = 2{,}5 \cdot 10 = 25 \text{ mm}$$

2. 21 irudiko datuak eta K = -1 homotezia-arrazoia ezagututa, marraz ezazu emandako ABCD poligonoaren poligono homotetikoa.

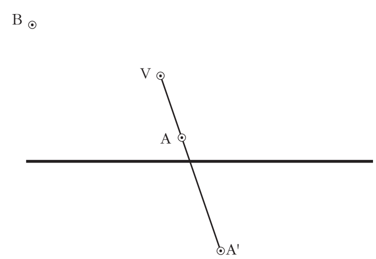


Buruturiko ariketan ikus daitekeenez, *simetria zentral* bat da era honetan definituriko *homotezia*.

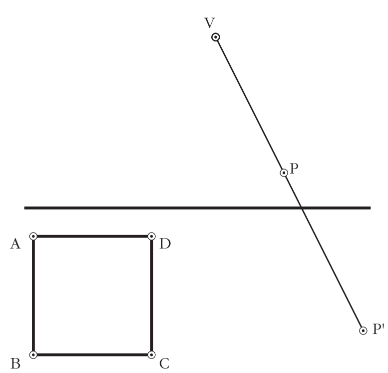
21. irud.

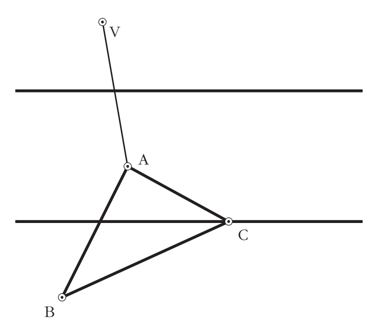
EBAZTEKO ARIKETAK

1. Irudian zehazturiko *homologiara* jo, eta aurki ezazu B puntuaren puntu *homologoa*.

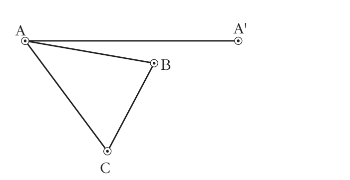


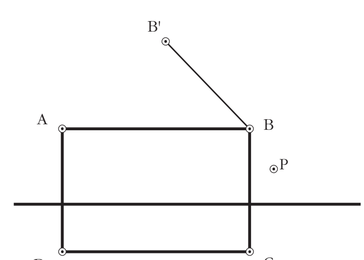
2. Aurki itzazu emandako irudien *irudi homologoak*.



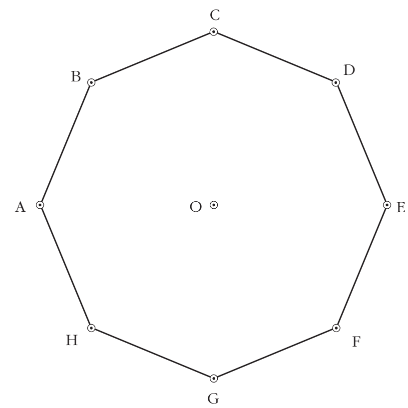


3. Aurki itzazu emandako irudien *irudi afinak*.





4. Aurki ezazu emandako poligonoaren *irudi homotetikoa*, jakinik *homotezia-zentroa* 0 puntua eta *homotezia-arrazoia* K = 1/3 direla.



5. Aurki ezazu ABC triangeluaren *irudi homotetikoa*, jakinik *homotezia-zentroa* O eta *homotezia-arrazoia* irudiko zuzenkiaren K luzera direla.